ریاضی گسسته

الهام رستگاری

گزاره ها و علامت گذاری (Statements And Notation)

گزاره یک جمله‌ی خبری ساده است که بدون هیچ‌گونه ابهام و بدون کمک از هیچ اطلاع دیگری، به جز آنچه که در خود جمله بیان شده است، بتوان راست یا دروغ بودن آن را تشخیص داد. (هر چند که فعلاً راست یا دروغ بودن آن برای ما معلوم نباشد)

مثلاً «تهران پایتخت کنونی ایران است»، «هر عدد زوج بر ۲ بخش‌پذیر است»: هر دو گزاره راست هستند!

«اصفهان پایتخت کنونی ایران است» و «عدد ۴ از ۳ کوچکتر است» هر دو گزاره دروغ هستند!

«در کره‌ی مریخ موجودات ذره‌بینی زندگی می کنند» یک جمله خبری و گزاره است هر چند که راست یا دروغ بودن آن فعلاً بر ما معلوم نیست ولی روزی معلوم خواهد شد که این جمله راست است یا دروغ است و جز این نخواهد بود.

ولی هیچ‌یک از جملات زیر گزاره نیستند:

«دوستم حسن مرد حسودی است»، زیرا حسود بودن نسبی است.

«علی در را ببند!»، زیرا یک جمله‌ی امری است.

بنابراین .O.L (Object Language) تنها شامل جملات خبری ساده است که فقط دارای یکی از دو ارزش راست (True) و یا دروغ (False) باشد.

❄ در منطق سمبولیک گزاره ها را با یکی از حروف بزرگ انگلیسی به غیر از T و F نمایش می دهند.

لفظهای پیوند دهنده (Connectives)

گزاره‌ها بر دو نوع‌اند. گزاره‌های ساده (Primitive Statement)، گزاره‌های مرکب (Compound Statement).

گزاره ساده یک جمله‌ی خبری ساده است که به جملات ساده‌تر قابل تجزیه نمی باشد و شامل هیچ لفظ پیوند دهنده‌ای نیست ولی گزاره مرکب را می توان از ترکیب گزاره‌های ساده و لفظ‌های پیوند دهنده و پرانتزها بوجود آورد. بنابراین در زیر چند لفظ پیوند دهنده مورد استفاده معرفی گردیده است؛

نفی (Negation) (~،ר)

اگر P یک گزاره‌ی دلخواه باشد، گزاره‌ای را که P را انکار کند، نفی P گویند و به صورت "ךP" یا "~P" نشان می دهند و «نفی P» یا «چنین نیست که P» می‌خوانند.

هر گاه P راست باشد، ~P دروغ خواهد بود و بلعکس. جدول درستی این عملگر یگانی (Unary Operation) به شکل زیر است؛

P	~P
T	F
F	T

ترکیب عطفی یا AND (Conjunction) (∧)

گزاره‌ی مرکب حاصل از ترکیب عطفی دو گزاره‌ی دلخواه P و Q را به صورت P∧Q نشان می‌دهند و آن را «ترکیب عطفی P و Q» یا «P و Q» می خوانند. جدول درستی این ترکیب، (Binary Operation) به شکل زیر است؛

P	Q	P∧Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ترکیب فصلی یا OR (Disjunction) (V)

گزاره‌ی حاصل از ترکیب فصلی دو گزاره‌ی دلخواه P و Q را به صورت PVQ نشان می دهند و آن را «ترکیب فصلی P و Q» و یا «P یا Q» می خوانند. جدول درستی این ترکیب به شکل زیر است؛

P	Q	PVQ
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

فرمول گزاره‌ای و جدول ارزش (Statement Formula And Truth Table)

هنگامی که گزاره‌های دلخواه را به طور مجرد در نظر بگیریم و آن‌ها را با استفاده از وسیله‌ی لفظهای پیوند دهنده با نظمی خاص کنار هم قرار دهیم، آنچه را که بدست می‌آید فرمول گزاره‌ای و هر یک از گزاره‌های ساده‌ی بکار رفته را یک مؤلفه گویند.

جدول ارزش (Truth Table)

جدولی که ارزش فرمول گزاره‌ای را به ازای تمام ترکیبات ارزش ممکن برای مؤلفه‌ها نمایش دهد، جدول ارزش آن فرمول گویند. اگر فرمول گزاره‌ای شامل n متغیر گزاره‌ای متمایز باشد، آنگاه جدول ارزش آن شامل 2^n ترکیبات ارزش متمایز خواهد بود.

مثال) جدول ارزش فرمول گزاره‌ای $(P \vee Q) \vee \sim P$ را تشکیل دهید؛

P	Q	P ∨ Q	~P	(P ∨ Q) ∨ ~P
T	T	T	F	T
T	F	T	F	T
F	T	T	T	T
F	F	F	T	T

❋ این مثال یک tautology است که در ادامه به تعریف آن خواهیم پرداخت

ترکیب شرطی (Conditional Statement) (→)

ترکیب شرطی دو گزاره‌ی دلخواه P و Q را به صورت P→Q نشان می دهند و آنرا «اگر P آنگاه Q» می خوانند، در گزاره‌ی شرطی P→Q مؤلفه‌ی P را شرط (مقدم، Antecedent) و Q را جواب شرط (تالی، Consequent) گویند.

ارزش گزاره‌ی P→Q فقط هنگامی دروغ است که مقدم آن دارای ارزش T و تالی آن دارای ارزش F باشد.

ترکیب شرطی در زبان فارسی به صورت زیر بیان می‌شود:

Q شرط لازم برای P است.

P شرط کافی برای Q است.

Q اگر P

P فقط اگر Q

جدول درستی این ترکیب به شکل روبرو است؛

P	Q	P→Q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

باید توجه نمود در گزاره‌ی P→Q هیچ‌گونه مفهوم شرط وجود ندارد و تنها یک نامگذاری است. هم‌چنین وجود هیچ رابطه‌ای بین P و Q ضروری نیست.

مثال۱) گزاره‌ی P→Q که در آن، P: امروز هوا آفتابی است و Q: $2+7\geq4$، دو گذاره معین هستند را به صورت جمله‌ی فارسی بیان کنید؛

پاسخ: اگر امروز هوا آفتابی باشد، آنگاه $2+7\geq4$ خواهد بود.

مثال۲) گزاره‌ی زیر را بصورت سمبلیک بنویسید:

«اگر علی درس جبر را انتخاب کند یا رامین درس جغرافی را انتخاب کند، آنگاه حسن درس منطق را انتخاب خواهد کرد.»

پاسخ: با فرض P: علی درس جبر را انتخاب کند، Q: رامین درس جغرافی را انتخاب کند، L: حسن درس منطق را انتخاب می کند، داریم؛

$(P \vee Q) \to L$

ترکیب دو شرطی (Biconditional) (↔, ⇄)

اگر P و Q دو گزاره‌ی دلخواه باشند، گزاره‌ی P↔Q («P اگر و فقط اگر Q» می خوانند) را گزاره‌ی ترکیب دو شرطی گویند و گاهی به صورت اختصاری «P iff Q» نیز نشان می‌دهند. گزاره‌ی ترکیب دو شرطی P↔Q فقط هنگامی ارزش T دارد که P و Q هر دو دارای ارزش یکسان باشند. در زبان فارسی گزاره‌ی ترکیب دو شرطی را به صورت «P شرط لازم و کافی برای Q است» بیان می کنند. جدول درستی این ترکیب به صورت زیر است؛

P	Q	P↔Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

مثال) جدول زیر ارزش فرمول گزاره‌ای $\sim(P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$ را تشکیل می دهد.

P	Q	$P \wedge Q$	$\sim(P \wedge Q)$	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \vee \sim Q$	$\sim(P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

با توجه به جدول معلوم می‌شود که ارزش فرمول مستقل از دو متغیر P و Q می‌باشد. یعنی فرمول به ازای تمام ارزشهای ممکن برای متغیرهای P و Q دارای ارزش T می‌باشد.

فرمول گزاره‌ای همیشه راست (Tautology)

فرمول گزاره‌ای را که مستقل از ارزش گزاره‌های معینی که جایگزین متغیرهای آن می‌شوند دارای ارزش راست باشد، فرمول گزاره‌ای همیشه راست (Taut) گویند. به عبارت دیگر جدول درستی این فرمولها در همه‌ی حالتها خروجی T دارد.

مثال) فرمول $(P \to Q) \leftrightarrow (\sim P \vee Q)$ یک فرمول گزاره‌ای همیشه راست است.

فرمول گزاره‌ای همیشه دروغ (Contradiction)

تعریف فرمول Cont دقیقاً بر خلاف فرمول Taut است و خروجی جدول درستی آن در همه حالتها F است.

مثال) فرمول $P \wedge \sim P$ یک فرمول گزاره‌ای همیشه دروغ است.

فرمول‌های هم ارز (Equivalence of Formulas) (⇔ ،≡)

فرض کنیم A و B دو فرمول گزاره‌ای و $P_1, P_2, \ldots, P_n$ همه‌ی متغیرهای ظاهر شده در A و B باشند اگر به ازای هـر یـک از 2^n ترکیبات ارزش ممکن برای متغیرها، ارزش دو فرمول A و B یکسان باشد آنگاه گوییم A و B هم‌ارزند و آن را بـه صـورت "A⇔B" نشان می دهند.

مثال)

P~ ~ با P هم‌ارز است. PVP با P هم‌ارز است. (P ∧ ~P) ∨ Q با Q هم‌ارز است.

طریقه‌ی تشخیص هم‌ارزی دو فرمول A و B:

۱ـ تشکیل جدول ارزش دو فرمول A و B و مقایسه‌ی دارایه‌های ستون آخر آنها.

۲- استفاده از جدول ارزش ترکیب دو شرطی A ↔ B، در صورتی که دو فرمول A و B هم‌ارز باشند باید A ↔ B یک Tout باشد. در صورتی که دو فرمول A و B هم‌ارز باشند آن را به صورت «A⇔B» نشان می‌دهند که «A⇔B» یک گزاره نیسـت. یعنی علامت ⇔ لفظ پیوند دهنده نیست و از اعمال آن بر روی گزاره‌ها، گزاره‌ی جدیدی بوجود نمی‌آید.

فرمولهای هم‌ارزی مهم

$P \lor P \Leftrightarrow P$	قانون خود توانی	$P \land P \Leftrightarrow P$
$(P \lor Q) \lor R \Leftrightarrow P \lor (Q \lor R)$	شرکت پذیری	$(P \land Q) \land R \Leftrightarrow P \land (Q \land R)$
$P \lor Q \Leftrightarrow Q \lor P$	جابجایی	$P \land Q \Leftrightarrow Q \land P$
$P \lor (Q \land R) \Leftrightarrow (P \lor Q) \land (P \lor R)$	توزیع پذیری	$P \land (Q \lor R) \Leftrightarrow (P \land Q) \lor (P \land R)$
$P \lor F \Leftrightarrow P$	همانی (عضو خنثی)	$P \land T \Leftrightarrow P$
$P \lor T \Leftrightarrow T$	عضو صفر	$P \land F \Leftrightarrow F$
$P \lor \sim P \Leftrightarrow T$	مکمل (عضو وارون)	$P \land \sim P \Leftrightarrow F$
$P \lor (P \land Q) \Leftrightarrow P$	جذب	$P \land (P \lor Q) \Leftrightarrow P$
$\sim(P \lor Q) \Leftrightarrow \sim P \land \sim Q$	دمورگان	$\sim(P \land Q) \Leftrightarrow \sim P \lor \sim Q$
$P \to Q \Leftrightarrow \sim P \lor Q$ $P \to Q \Leftrightarrow \sim Q \to \sim P$ $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \land Q) \to R \Leftrightarrow Q \to (P \to R)$ $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \land (Q \to P) \Leftrightarrow (\sim P \lor Q) \land (\sim Q \lor P)$		

مثال) نشان دهید که فرمولهای زیر باهم هم ارز هستند؛

$(\sim P \wedge (P \to Q)) \to \sim Q \Leftrightarrow Q \to P$

پاسخ:

$(\sim P \wedge (P \to Q)) \to \sim Q$
$\Leftrightarrow (\sim P \wedge (\sim P \vee Q)) \to \sim Q$
$\Leftrightarrow \sim P \to \sim Q$
$\Leftrightarrow Q \to P$

استلزام منطقی (Tautological Implication)

بر خلاف لفظهای پیوند دهنده عطفی، فصلی و دو شرطی که دارای تقارن (Symmetric) هستند، ترکیب شرطی این خاصیت را دارا نمی باشد و برای بررسی نمودن درست بودن یک عبارت که دارای ترکیب های شرطی است از استلزامها استفاده می شود. (خاصیت تقارن یعنی: $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$)

قواعد مهم در استلزام

۱ـ قاعده استنتاج یا استثناء $P, P \to Q \vdash Q$

۲ـ قاعده تعدی $P \to Q , Q \to R \vdash P \to R$

۳ـ قاعده فصلی $P \vdash P \vee Q$, $P \vee Q \vdash Q$

۴ـ قاعده عطفی $P , Q \vdash P \wedge Q$, $Q \vdash P \vee Q$

۵ـ قاعده تخصیص $P \wedge Q \vdash P \mid Q$

۶ـ قاعده معکوس (عکس) $P \to Q , \sim Q \vdash \sim P$

❋ قاعده ۶ به این مفهوم است که اگر P به نتیجه F منجر شود، آنگاه خود P، نادرست است.

❋ استدلال غلط، استدلالی است در برخی حالات که همه فرض‌های آن صحیح است، تالی غلط باشد.

مثال) اگر علی در امتحان گسسته نمره الف بگیرد، پدرش برای او یک هدیه می گیرد. پدر علی هدیه را گرفته است؛ آیا می توان نتیجه گرفت نمره ی علی الف شده باشد؟

پاسخ: P: علی در درس ساختمان گسسته نمره‌ی الف بگیرد. Q: پدر علی هدیه را خریده است.

آیا می توان نتیجه گرفت که علی نمره الف گرفته؟ $(P \to Q) \wedge Q$

P	Q	$P \to Q$	$(P \to Q) \wedge Q$	$((P \to Q) \wedge Q) \to P$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

مثال۱) با استفاده از روش مستقیم (قواعد استنتاج) ثابت کنید عبارت زیر یک عبارت همیشه راست است!

$[(P\to Q) \wedge (\sim R\to \sim Q) \wedge \sim R] \to \sim P$

شماره	گزاره	قانون مورد استفاده
1	$P\to Q$	فرض ۱
2	$\sim Q\to \sim P$	هم ارزی۱
3	$\sim R\to \sim Q$	فرض ۲
4	$\sim R\to \sim P$	از شماره ۲ و ۳ و قانون تعدی
5	$\sim R$	فرض ۳
6	$\sim P$	از شماره ۴ و ۵ و قاعده استنتاج

※ دقت شود که هر چیزی در ستون وسط جدول فوق ظاهر می شود حتماً درست (Tout) است که ظاهر گردیده است وترکیب عطفی آنها همواره T است!

مثال۲) نشان دهید که $R\wedge(P\vee Q)$ نتیجه‌ی معتبری از فرضهای زیر است؛

$P \vee Q \quad , \quad Q\to R \quad , \quad P\to S \quad , \quad \sim S$

شماره	گزاره	قانون مورد استفاده
1	$P\to S$	فرض ۱
2	$\sim S$	فرض ۲
3	$\sim P$	از شماره ۱ و ۲ و قاعده عکس
4	$P \vee Q$	فرض ۳
5	$\sim P \to Q$	هم ارزی ۴
6	Q	شماره ۳ و ۵ و قاعده استنتاج
7	$Q \to R$	فرض ۴
8	R	شماره ۶ و ۷ و قاعده استنتاج

اثبات غیر مستقیم

در این روش از نتیجه به فرض می‌رسیم که درست است یا نه! برای مثال در زیر اگر نقیض Q نتیجه دهد نقیض P را پس حتماً $P \rightarrow Q$ درست است.

$P \rightarrow Q \equiv \sim Q \rightarrow \sim P$

مثال) ثابت کنید:

if n^2 فرد $\rightarrow$ n فرد

پاسخ:

n زوج باشد $= 2k \rightarrow n^2 (2k^2) = 4k^2 = 2(2k^2) \rightarrow 2m$

اثبات به روش برهان خُلف

بر پایه‌ی قاعده عکس استوار است. زمانی که بخواهیم به این روش نشان دهیم که عبارت Q به طور منطقی از $P_n, \dots, P_2, P_1$ نتیجه می‌شود، برهان خلف به این صورت بیان می شود که فرض می کنیم نقیض Q به عنوان یک فرض اضافی به فرض‌های مسئله افزوده شده و همچنین فرض‌های $P_n, \dots, P_2, P_1$، True هستند؛ اگر فرض‌های افزایش یافته به یک Contradiction یا تناقض دچار شوند، در این صورت دست کم یکی از فرض‌ها باید True یا False باشد و از آنجا که $P_n, \dots, P_2, P_1$، True هستند آنگاه $\sim Q$، False است؛ در نتیجه Q، True است.

$P \rightarrow Q \;, \sim Q \;\; \vdash \sim P \quad , \quad P_1, P_2, \dots, P_n \rightarrow Q \quad , \quad P_1, P_2, \dots, P_n, \sim Q \rightarrow F$

$\sim Q$ is False , Q is True

مثال) با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید عبارت زیر درست است؛

$P \vee Q \;,\; \sim Q \vee R \;\; \vdash \;\; P \vee R$

پاسخ: ابتدا جمله $P \vee R$ را نقیض کرده و به فرض‌ها اضافه می کنیم که فرمول گزاره‌ای زیر حاصل می‌شود:

$P \vee Q \;,\; \sim Q \vee R \;,\; \sim P \wedge \sim R$

شماره	گزاره	قانون مورد استفاده
1	$\sim P \wedge \sim R$	فرض ۱
2	$\sim P$	شماره ۱ و قاعده تخصیص
3	$\sim R$	شماره ۱ و قاعده تخصیص
4	$P \vee Q$	فرض ۲
5	$\sim P \rightarrow Q$	هم ارزی ۴
6	Q	شماره ۲ و ۵ و قاعده استنتاج
7	$\sim Q \vee R$	فرض ۳
8	$Q \rightarrow R$	شماره ۷ و هم‌ارزی
9	R	شماره ۶ و ۸ و قاعده استنتاج

$R \wedge \sim R = F$

گذاره‌ی معتبر

هر مقداری یا هر n مقداری که به جای متغیر قرار گیرد و گزاره ارضا گردد، گزاره‌ی معتبر است. به عبارتی دیگر در صورتی که یک nتایی موجود باشد که بتواند یک گزاره‌نمای n مکانی را تبدیل به یک گزاره درست نماید، گفته می‌شود که این nتایی گزاره‌نما را ارضا می کند. در صورتی که تمام nتایی‌های موجود موجب ارضای یک گزاره‌نما شوند، گزاره‌نمای مذبور را معتبر خواهیم گفت؛

سور

سور جهانی ∀ (هر) یعنی همه مقادیر a, b, c مسوّر جهانی نام می گیرند. (تمامی مقادیر)

$\forall\, a, b, c \quad \rightarrow \quad a+(b+c) = (a+b)+c$

سور وجودی ∃ (وجود دارد). b مسوّر وجودی (حداقل وجود دارد)

مثال) آیا رابطه‌های روبرو باهم برابرند!؟

$\forall a \quad \exists b \quad S(a,b)$

$\exists b \quad \forall a \quad S(a,b)$

پاسخ: در عبارت اول به ازای هر a مقداری برای b وجود دارد، به‌طوری که S(a,b) درست است. در حالی که تغییر دادن جای سورها باعث خواهد شد تا معنی جمله تغییر کند و به این شکل تغییر شود که مقداری برای b وجود دارد که با انتخاب آن گزاره‌نمای S صرف نظر از مقداری که برای a انتخاب می‌شود می تواند به یک گزاره درست تبدیل شود.

رابطه‌های زیر را تعبیر کنید:

$\forall x \quad P(x)$, $\exists x \quad P(x)$

نقیض گزارهای سوردار

$\exists x \quad \sim P(x) \equiv \sim[\forall x \quad P(x)]$

$\forall x \quad \sim P(x) \equiv \sim[\exists x \quad P(x)]$

استقرای ریاضی

$P(n_0)$, $k \geq n_0$ $[P(k) \rightarrow P(k+1)]$ $\vdash$ $\forall$ $n\,(Pn)$

۱- مبنای استقرا: به ازای مقدار اولیه برقرار است. $P(1)$ یا $P(n_0)$

۲- فرض استقرا: فرض کنید $P(k)$ درست است. $K \geq n_0$ یا $k \geq 1$

۳- مرحله استقرا: از فرض $P(k)$ صحیح است به $P(k+1)$ صحیح است برسید.

مثال) نشان دهید مجموع اولین n عدد فرد برابر با n^2 است؛

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

$$S(1) = \sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1$$ مبنای استقرا

$$S(k) = \sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$$ فرض استقرا

$$S(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{k}(2i-1) + 2k+1 = k^2+2k+1 = (k+1)^2$$ مرحله استقرا

$$(k+1) \rightarrow \sum_{i=1}^{k} 2\,(k+1)-1 \rightarrow 2k+2-1 = 2k+1$$

مثال) بوسیله‌ی استقرای ریاضی نشان دهید که برای هر عدد صحیح مثبت $n \geq 1$، عدد $6^{n+2} + 7^{2n+1}$ بر 43 بخش‌پذیر است؛

$$6^{1+2} + 7^{2+1} = 6^3 + 7^3 = 559 \xrightarrow{\text{تقسیم}} 43 * 13$$

$$k \rightarrow \quad 6^{k+2} + 7^{2k+1} = 43m$$

$$k+1 \rightarrow \quad 6^{k+3} + 7^{2k+3} = 6(6^{k+2}) + 7^{2k+1}(7^2) = 6(6^{k+2} + 7^{2k+1}) + 43 * 7^{2k+1}$$
$$= 6 * 43m + 43 * 7^{2k+1} = 43(n)$$

$$7^2 \rightarrow 43 + 6$$

نظریه‌ی مجموعه‌ها (روابط)

رابطه‌ی R بین دو مجموعه‌ی غیر تهی A,B، زیر مجموعه‌ای از حاصلضرب درکارتی A*B است؛ اگر $R\subseteq A*B$ و $x,y \in R$ باشند می گوییم x R y $(x \xrightarrow{R} y)$، x از طریق رابطه‌ی R به y مرتبط است. $(R \to x\in A\ ,\ y\in B)$. و در صورتی که x,y با هم مرتبط نباشند به شکل $x \not{R}\, y$ $(x \xrightarrow{\not{R}} y)$ نشان می‌دهیم.

اگر رابطه‌ی R فقط در یک مجموعه باشد مانند A می گوییم، R رابطه‌ای در A است.

ماتریس روابط

اگر مجموعه‌ی $A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$ و $B=\{b_1,b_2,b_3,\ldots,b_m\}$ دو مجموعه‌ی متناهی به ترتیب با n عضو و m عضو باشند و R یک رابطه از A به B باشد می توان آنرا بصورت یک ماتریس n*m مانند $M_R[R_{ij}]$ نشان داد، که در آن هر گاه $(a_i\ ,\ b_j) \in R$ باشد، مقدار ۱ و در غیر اینصورت مقدار صفر لحاظ می شود. به ماتریسی که فقط مقادیر صفر و یک دارد ماتریس بولی گویند.

مثال) $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{1,2,3,4\}$ ؛ $R=\{(a,2), (b,1), (b,3), (b,4), (c,4)\}$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

تعریف: اگر R یک رابطه از A به B باشد آنگاه مجموعه‌ی نسبی x نسبت به R که با R(x) نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌گردد؛

$R(x) =\{y \mid y \in B\ ,\ x\ R\ y\}$

به طریق مشابه اگر A_1 زیر مجموعه‌ی A باشد در اینصورت R(A) مجموعه‌ی نسبی A_1 نسبت به R به صورت زیر تعریف می‌شود؛

if $A_1 \subseteq A$ $R(A_1)=\{y \mid y \in B\ ,\ x\ R\ y$ برای x متعلق به $A_1\}$

❊ دقت شود x در R(x) یک عضو است و A_1 در $R(A_1)$ یک مجموعه است!

مثال) اگر $A=B=\{a,b,c,d\}$ و رابطه‌ی $R=\{(a,a), (a,b), (b,c), (c,a), (d,c), (c,b)\}$ آنگاه؛

$R(a)=\{a,b\}$

نکته: $(a,b) \neq (b,a)$

و اگر A1 که زیر مجموعه‌ای از A است $(A1 \subseteq A)$ برابر با $A1=\{c,d\}$ باشد، خواهیم داشت؛

$R(A1)=\{a,b,c\}$

قضیه: اگر R رابطه‌ای از A به B باشد و A_1 و A_2 زیر مجموعه‌ای از A باشند در این صورت روابط زیر برقرار است؛

الف) اگر $A_1 \subseteq A_2$ آنگاه: $R(A_1) \subseteq R(A_2)$

ب) $R(A_1 \cup A_2)= R(A_1) \cup R(A_2)$

ج) $R(A_1 \cap A_2) \subseteq R(A_1) \cap R(A_2)$

تمرین) با مثال نشان دهید که $R(A_1 \cap A_2) \subseteq R(A_1) \cap R(A_2)$ صحیح است و نمی تواند مساوی باشد: A_1 و A_2 زیر مجموعه A

$A=\{a,b,c,d\}$
$A_1=\{a,b\}$
$A_2=\{b,c\}$
$R=\{(a,a)(a,b)(b,c)(c,a)(d,c)(c,b)\}$

$F_1=A_1 \cap A_2 \rightarrow \{b\}$
$R(F_1)=\{c\}$

$R(A_1) \rightarrow \{a,b,c\}$ $\qquad$ $R(A_2) \rightarrow \{a,b,c\}$
$\{a,b,c\} \cap \{a,b,c\}=\{a,b,c\}$

$\{c\} \subseteq \{a,b,c\}$ و $\{c\} \neq \{a,b,c\}$

تعداد روابط از A به B برابر است با تعداد زیر مجموعه‌های A*B ، $2^{|A|*|B|}$

از آنجا که هر رابطه‌ای به صورت مجموعه تعریف می‌شود، می‌توان اعمال مجموعه‌ها را در روابط اعمال کرد.

اجتماع $x\ (R \cup S)\ y \rightarrow x R y \lor x S y$

اشتراک $x\ (R \cap S)\ y \rightarrow x R y \land x S y \rightarrow (x,y) \in R \land (x,y) \in S$

تفاضل $x\ (R - S)\ y \rightarrow x R y\ ,\ x \cancel{S} y \rightarrow (x,y) \in R \land (x,y) \notin S$

متمم $x\ \overline{R}\ y$ یا $x \sim R\ y \rightarrow x\ \cancel{R}\ y \rightarrow (x,y) \notin R\ ,\ (x,y) \in \overline{R}$

وارون $x\ R^{-1}\ y \rightarrow y\ R\ x$

مثال) در صورتی که مجموعه‌ی A و روابط R, S به صورت زیر باشند، کلیه اعمال روی مجموعه‌ها را بر روی رابطه‌ی R, S اعمال کنید؛

$A=\{1,2,3\}$
$R=\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,1)\}$
$S=\{(1,2), (2,1), (1,1), (3,3)\}$

$R \cup S: \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,1), (2,1), (3,3)\}$

$R \cap S: \{(1,1), (1,2)\}$

$\overline{R}: \{(2,1), (2,3), (3,2), (3,3)\}$ $A*A=3*3 \rightarrow 9-5=4$

$R^{-1}: \{(1,1), (2,1), (3,1), (2,2), (1,3)\}$

خواص رابطه‌ها

۱- بازتابی(Reflexive):

$$\forall \quad x \in A: \quad (x,x) \in R \qquad \text{or} \qquad x\,R\,x$$

مثال)

$A=\{1,2,3\}$ $\qquad$ $R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),\ldots\}$ $\qquad$ دقت شود هر سه عضو باید در مجموعه باشند تا بازتابی صورت گیرد

۲- ضد بازتابی (Irreflexive):

$$\forall \quad x \in A: \quad (x,x) \notin R \qquad \text{or} \qquad x \not R\, x \qquad \equiv \qquad \nexists \quad x \in A: \quad x\,R\,x$$

مثال)

$A=\{1,2,3\}$ $\qquad$ $R_2=\{(1,2),(3,1),(2,3)\}$

* رابطه روبرو نه بازتابی و نه ضد بازتابی است! $\qquad$ $\{(1,1),(3,3),(1,2),(3,1)\}$

۳- تقارنی (Symmetric):

$$\forall \quad x,y \in A: \quad x\,R\,y \quad \to \quad y\,R\,x$$

مثال)

$A=\{1,2,3\}$ $\qquad$ $R_3=\{(1,1),(2,1),(1,2)\}$

۴- پادتقارنی (ضد تقارن، AntiSymmetric):

$$\forall \quad x,y \in A: \quad x\,R\,y\;,\; y\,R\,x \quad \to x=y$$

یعنی اگر هر دو جود داشتند باهم برابر باشند

مثال)

$A=\{1,2,3\}$ $\qquad$ $R_4=\{(1,1),(3,1),(2,3)\}$

تعریف پادتقارن در مثال فوق یعنی اینکه اگر (1,2) باشد، (2,1) وجود نداشته باشد!

۵- تعدی (ترایابی، Transitive):

$$\forall \quad x,y,z \in A: \quad x\,R\,y\;,\; y\,R\,z \quad \to x\,R\,z$$

مثال)

$A=\{1,2,3\}$ $\qquad$ $R_5=\{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\}$

* در مثال فوق حتماً باید (۱,۱) و (۲,۲) باهم وجود داشته باشند چرا که دو مورد اول را می توان از چپ به راست و از راست به چپ خواند!

مثال) برای مجموعه‌ی روبرو روابط زیر را بنویسید؛ $A=\{1,2,3\}$

الف) فقط دارای رابطه بازتابی باشد؛

$\{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (3,2)\}$

ب)فقط دارای خاصیت تقارنی باشد؛

$\{(1,2), (2,1), (3,3)\}$

ج) دارای خاصیت متقارن و متعدی باشد؛

$\{(1,2), (2,1), (1,1), (2,2)\}$

د) دارای خاصیت پادتقارن و متعدی باشد؛

$\{(3,1), (3,3)\}$

هـ) دارای خاصیت متقارن، پادمتقارن و بازتاب باشد ولی متعدی نباشد؛

چنین مجموعه ای وجود ندارد، چرا که هر رابطه‌ای که متقارن و پادمتقارن و بازتاب باشد، حتماً متعدی است!

❋ $\Delta=\{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ ← رابطه تساوی

❋ رابطه‌ای بازتابی است که به ازای هر عضو مجموعه‌ی مورد نظر تمامی زوج‌های مرتب x و x را شامل شود.

❋ رابطه‌ای ضدبازتابی است که هیچ زوج مرتب x, x در رابطه وجود نداشته باشد.

❋ رابطه‌ای دارای خاصیت تقارن است که اگر x, y در رابطه وجود دارد y, x نیز در رابطه وجود داشته باشد.

❋ خاصیت پادتقارن، رابطه‌ای که در صورت وجود زوج مرتب x, y، زوج مرتب y, x در آن وجود نداشته باشد.

❋ رابطه‌ای که در صورت وجود زوج مرتب x, y و زوج مرتب y, z، زوج مرتب x, z وجود داشته باشد.

نکته۱: رابطه‌ای دارای خاصیت بازتابی، تقارنی و پاد تقارنی باشد، قطعاً دارای خاصیت متعدی خواهد بود.

نکته۲: رابطه‌ای بازتاب است اگر و اگر Δ (تساوی) زیر مجموعه R باشد. $\Delta \subseteq R$

نکته۳: یک رابطه متقارن است در صورتی که $R=R^{-1}$

نکته۴: یک رابطه دارای خاصیت تعدی است اگر و فقط اگر $R^2 \subseteq R$

نکته۵: یک رابطه دارای خاصیت پادتقارن است اگر و فقط اگر $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$

ماتریس روابط و خواص رابطه‌ها

۱- بازتابی: در صورتی که عناصر قطر اصلی همگی یک باشند (در ماتریس) رابطه دارای خاصیت بازتابی است.

۲- ضدبازتابی: در صورتی که عناصر قطر اصلی همگی صفر باشند، رابطه دارای خاصیت ضدبازتابی است.

۳- تقارنی: در صورتی که $M=M^t$، (ماتریس برابر با ترانهاد آن باشد)، رابطه دارای خاصیت تقارنی است.

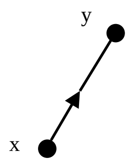
۴- ضدتقارنی: در صورتی که به ازای وجود زوج مرتب x, y، زوج مرتب y, x وجود نداشته باشد، رابطه دارای خاصیت ضدتقارنی است.

۵- تعدی: در صورتی که $M_{R^2} \leq M_R$ باشد (یعنی ضرب ماتریس در خودش کوچکتر از خود ماتریس باشد) رابطه دارای خاصیت تعدی است.

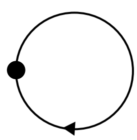
یادآوری: برای ضرب دو ماتریس خانه اول در ستون اول ضرب شده و مقادیر باهم جمع می گردد و در خانه اول نتیجه قرار می گیرد و به همین ترتیب ادامه پیدا می کند!

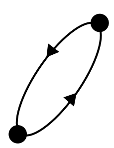
❋ در صورتی که رابطه‌ای دارای سه خاصیت بازتابی، تقارنی و تعدی باشد، این رابطه را یک رابطه‌ی هم ارزی گوییم.

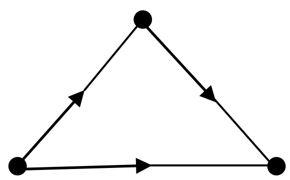
$A=\{1,2,3\}$ $\qquad$ $R=\{(1,1), (2,2), (3,3)\}$



x R y


x R x


x R y ∧ y R x


x R y ∧ y R z ∧ x R z

رابطه‌ی هم‌نهشتی

$$a \overset{n}{\equiv} b \quad \rightarrow \quad \left|\frac{n}{(a-b)}\right|$$

جمله فوق a هم‌نهشت است با b به پیمانه‌ی n یا a-b بخش پذیر است بر n را بیان می کند!

آیا رابطه‌ی فوق هم ارزی است یا خیر؟

برای اینکار بازتابی، تقارن و تعدی را بررسی می کنیم؛

$$a \overset{2}{\equiv} b \quad \rightarrow \quad \left|\frac{2}{(a-b)}\right| \quad \rightarrow \quad (a-b) = 2k$$

بررسی بازتاب:

$a \overset{2}{\equiv} a$ $\quad$ $a - a = 0 = 2*0$

بررسی تقارن:

$a \overset{2}{\equiv} b$ $\quad$ $(a-b)=2k \quad \rightarrow *(-1) \rightarrow \quad b-a= 2(-k) \quad \rightarrow b \overset{2}{\equiv} a$

بررسی تعدی:

$a \overset{2}{\equiv} b \quad , \quad b \equiv c \quad \rightarrow \quad (a-\cancel{b})=2k \quad , \quad \cancel{b}-c=2k'$ $\quad$ جگری+نارنجی

$\rightarrow a-c=2(k+k')$ $\quad$ $a \overset{2}{\equiv} c$

مثال) ثابت کنید روابط زیر هم‌ارزی هستند؛

A) $(a,b)\ R\ (c,d) \quad \leftrightarrow \quad a+d = b+c$

برای اینکار سه حالت بازتابی، تقارن و تعدی را بررسی می‌کنیم، اگر سه حالت خروجی درست ارائه کردند رابطه هم‌ارزی است.

بازتابی= $(a,b)\ \overset{?}{R}\ (a,b) \quad \rightarrow \quad a+b = b+a$ ☑

تقارنی= $(a,b)\ R\ (c,d) \quad \rightarrow \quad (c,d)\ \overset{?}{R}\ (a,b) \quad \rightarrow \quad a+d = b+c \quad , \quad c+b = d+a$ ☑

تعدی= $(a,b)\ R\ (c,d) \quad \rightarrow \quad a+d = b+c \quad \rightarrow \quad a+\underline{d}+\underline{c}+f = b+\underline{c}+\underline{d}+e \rightarrow a+f = b+e \quad \rightarrow \quad (a,b)\ R\ (e,f)$ ☑

$(c,d)\ R\ (e,f) \quad \rightarrow \quad c+f = d+e$

B) $(a,b)\ S\ (c,d) \quad \leftrightarrow \quad a+b = c+d$

بازتابی= $(a,b)\ \overset{?}{S}\ (a,b) \quad \rightarrow \quad a+b = a+b$ ☑

تقارنی= $(a,b)\ S\ (c,d) \quad \rightarrow \quad (c,d)\ \overset{?}{S}\ (a,b) \quad \rightarrow \quad a+b = c+d \quad , \quad c+d = a+b$ ☑

تعدی= $(a,b)\ S\ (c,d) \quad \rightarrow \quad a+b = c+d \quad \rightarrow \quad a+\underline{b} = e+f \quad \rightarrow \quad (a,b)\ S\ (e,f)$ ☑

$(c,d)\ S\ (e,f) \quad \rightarrow \quad c+d = e+f$

افراز

۱- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = A$

۲- $A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \forall\, i,j$

۳- $\nexists\, A_i \mid A_i = \emptyset$ هیچ زیر مجموعه‌ی تهی نداشته باشد

❈ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ را یک افراز (Partition) از مجموعه‌ی A گویند.

مثال) برای مجموعه A همه افرازها را بنویسید؛

$A=\{1, 2, 3\}$

1) { {1}, {2}, {3} } بزرگترین افراز
2) { {1, 2}, {3} }
3) { {2, 3}, {1} }
4) { {1,3}, {2} }
5) { {1, 2, 3} } کوچکترین افراز

* به هر زیر مجموعه یک کلاس یا بلوک گویند.

* برای هر افراز می توان رابطه‌ای نوشت که هم ارز می‌باشند مانند R، که این رابطه به صورت زیر تعریف می شود:

a R b اگر و تنها اگر a, b عضو یک کلاس باشند.

مثال رابطه‌ای زیر برای افرازهای ۲ و ۵

$R_2=\{ (1,2)\ (2,1)\ (1,1)\ (2,2)\ (3,3) \}$, $R_5=\{ (1,2)\ (1,1)\ (1,3)\ (3,2)\ (2,1)\ (2,3)\ (3,3)\ (3,1)\ (3,2)\}$

* تعداد روابط هم‌ارزی در مجموعه ای مانند A برابر است با تعداد افرازهای آن مجموعه

اگر A و B دو زیر مجموعه‌ی غیرتهی از مجموعه‌ای مانند x باشند که اشتراک آنها غیرتهی باشد، آنگاه در صورتی که مجموعه‌های I_0 تا I_3 را به صورت زیر تعریف کنیم، این ۴ مجموعه یک افراز برای مجموعه‌ی x خواهد بود.

$I_0 = A \cap B$ $I_1= \overline{A} \cap B$ $I_2= \overline{B} \cap A$ $I_3= \overline{A} \cap \overline{B}$

افراز $\{ I_0, I_1, I_2, I_3\}$

* به هر کدام از I_0 تا I_3 اشتراک متمم‌ها یا مینترها گویند.

کلاس هم‌ارزی

$[a]_R = [a]= \{x \mid x\ R\ a\}$ =کلاس هم‌ارزی نسبت به رابطه‌ی R $(x, a) \in R$

مثال) رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید؛ a=1 را بدست بیاورید

$R=\{ (1,2)\ (1,1)\ (1,3)\ (3,2)\ (2,1)\ (2,3)\ (3,3)\ (3,1)\ (3,2)\}$

[1]=? یعنی مولفه دوم آنها یک باشد $\rightarrow (x, 1)$

$[1]= \{1, 2, 3\}$

* به طور کلی هر رابطه هم ارزی بر روی یک مجموعه افرازهایی منحصر بفرد از آن مجموعه را بوجود می‌آورد.

اثبات Z (اعداد صحیح) با هم‌نهشتی ۴ $a \overset{4}{\equiv} b$

$[0]= \{ x \mid x= 4k \} = \{ \dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots \}$

$[1]= \{ x \mid x= 4k+1 \} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$

$[2]= \{ x \mid x= 4k+2 \} = \{\dots, -6, -2, 3, 6, 10, \dots\}$

$[3]= \{ x \mid x= 4k+3 \} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, \dots\}$

※ اگر R رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۴ باشد که بر روی مجموعه‌ی اعداد صحیح تعریف شده، این رابطه یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و Z را به ۴ کلاس هم‌ارزی افراز می کند که این ۴ کلاس 0, 1, 2, 3 هستند.

مثال۱) کلاس هم‌ارزی برای $a+d = b+c \leftrightarrow (a,b)\ R\ (c,d)$ را بنویسید؛

$[(a,b)]= \{ (x,y) \mid (x,y)\ R\ (a,b) \}$

$x+b = y+a$

if $a=b=0 \rightarrow x=y$

if $a=1 , b=2 \rightarrow y=x+1$

* $y= x+b-1$ معادله خط (شیب خط x)

※ این کلاس هم‌ارزی صفحه‌ی مختصات را به خطوط موازی با شیب (۱) افراز می‌کند.

مثال۲) کلاس هم ارزی برای $a+b = c+d \leftrightarrow (a,b)\ S\ (c,d)$ را بنویسید؛

$[(a,b)]= \{ (x,y) \mid (x,y)\ S\ (a,b) \}$

$x+y = a+b$

* $y= a+b-x$ معادله خط (شیب خط -x)

※ این کلاس هم‌ارزی صفحه‌ی مختصات را به خطوط موازی با شیب (۱-) افراز می‌کند.

بستارها

بستار بازتاب: برای رابطه‌ی R بر روی مجموعه‌ی A، کوچکترین مجموعه که شامل رابطه‌ی R باشد و بازتاب باشد را بستار بازتاب R گویند؛

مثال) R{ (1,1) (2,3) (3,2) (1,4) } A={1,2,3,4}

{ (1,1) (2,3) (3,2) (1,4) (2,2) (3,3) (4,4) }

بستار متقارن: برای رابطه‌ی R بر روی مجموعه‌ی A، کوچکترین مجموعه که شامل رابطه‌ی R باشد و متقارن باشد را بستار متقارن R گویند؛

مثال) R{ (1,1) (2,3) (3,2) (1,4) } A={1,2,3,4}

{ (1,1) (2,3) (3,2) (1,4) (4,1) }

بستار متعدی: برای رابطه‌ی R بر روی مجموعه‌ی A، کوچکترین مجموعه که شامل رابطه‌ی R باشد و متعدی باشد را بستار متعدی R گویند؛

مثال) R{ (1,1) (2,3) (3,2) (1,4) } A={1,2,3,4}

{ (1,1) (2,3) (3,2) (1,4) (2,2) }

روابط و گراف‌ها

هر رابطه‌ای مانند S که بر روی مجموعه‌ای مانند A تعریف شود را می‌توان با استفاده از یک گراف نمایش داد، می‌توان خواص رابطه‌ها را از روی گراف یک رابطه تشخیص داد.

الف) خاصیت بازتابی: گراف رابطه‌ی بازتابی دارای یک حلقه یا سیکل برای هر یک از رؤس می باشد.

ب) خاصیت ضدبازتابی: گرافی ضدبازتابی است که هیچ رأسی دارای حلقه یا سیکل نباشد.

ج) تقارنی: اگر از A به B یال وجود دارد، از B به A نیز وجود داشته باشد.

د) پادتقارنی: در گراف نباید هیچ یالی به صورت دو طرفه باشد.

هـ) تعدی: در صورتی که بین دو رأس مثل a و c مسیری به طول دو وجود دارد، باید بین آنها مسیری بـه طـول یـک وجـود داشته باشد.

مثال) بر روی مجموعه ی A که A={1,2,3,4} است، مشخص کنید؛

الف) چند رابطه وجود دارد؟

※ به ازای n عضو، n^2 زوج مرتب دارد. (4^2)

※ و در هر رابطه آن زوج می تواند وجود داشته یا وجود نداشته باشد که در این صورت دو حالت بوجود می‌آید،

پس؛ 2^{4^2} رابطه وجود دارد!

ب) چند رابطه‌ی بازتابی وجود دارد؟

※ رابطه بازتابی بر اساس ماتریس‌ها یعنی قطر اصلی ماتریس

و از آنجا که قطر اصلی اکنون ۴ عضو دارد و سایر خانه‌ها دو طرف نیز در نظرگرفته می‌شود

*پس؛ 4*4=16 (کل خانه‌ها) و ۴ عضو قطر اصلی که ثابت است از آن کم می شود؛*

16-4=12 و هر خانه دو حالت خواهد داشت؛

رابطه بازتابی: 2^{12} خواهد بود.

شکل کلی فرمول برای بدست آوردن رابطه بازگشتی: 2^{n^2-n}

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ج) چند رابطه‌ی متقارن وجود دارد؟

شکل کلی فرمول برای بدست آوردن رابطه‌ی متقارن: $2^n \times 2^{\frac{n^2-n}{2}}$

※ ابتدا قطر اصلی را جدا می نویسیم (2^4) سپس یک نیمه از ماتریس را محاسبه می کنیم چرا که نیمه‌ی دوم بر اساس نیمه‌ی اول خواهد بود که ۴ خانه ثابت قطر اصلی را از کل خانه ها کم و تقسیم بر دو می کنیم: $2^{\frac{16-4}{2}}$

پس در نهایت: $2^4 * 2^6 = 2^{10}$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

د) چند رابطه‌ی پادمتقارن وجود دارد؟

شکل کلی فرمول برای بدست اوردن رابطه‌ی پادمتقارن: $2^n \times 3^{\frac{n^2-n}{2}}$

※ ابتدا قطر اصلی را جدا کرده (2^4) ، در حالت پاد متقارن یا یک خانه از یک نیمه از ماتریس صفر و نیمه‌ی دیگر یک و یا بلعکس و یا دو طرف صفر خواهد بود پس سه حالت بوجود می‌آید که عدد پایه ۳ خواهد شد.

در نتیجه : $2^4 * 3^6$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

هـ) چند رابطه وجود دارد که هم دارای خاصیت بازتابی و هم متقارن وجود دارد؟

شکل کلی فرمول: $2^{\frac{n^2-n}{2}}$

پس در نتیجه: 2^6

※ $۲^۴$ (قطر اصلی) حذف می شود چرا که در این حالت حتماً فقط (۱) است و حالت دیگری ندارد!

و) چند رابطه وجود دارد که هم دارای خاصیت بازتابی و پادمتقارن وجود دارد؟

شکل کلی فرمول: $3^{\frac{n^2-n}{2}}$

پس در نتیجه: 3^6

※ $۲^۴$ (قطر اصلی) حذف می شود چرا که در این حالت حتماً فقط (۱) است و حالت دیگری ندارد!

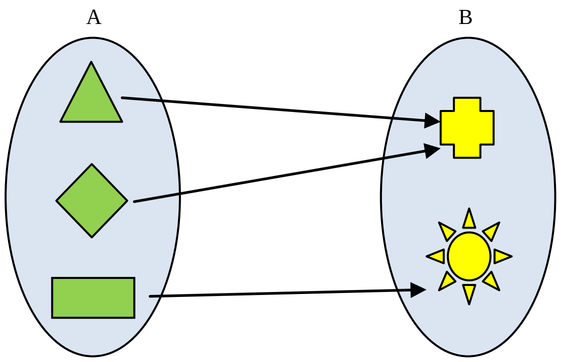
ز) چند رابطه وجود دارد که هم دارای خاصیت متقارن و هم پادمتقارن باشد؟

※ خاصیت متقارن و پادمتقارن یعنی به غیر از قطر اصلی سایر خانه‌های ماتریس صفر باشند و تک حالت هستند!

پس در نهایت: 2^4

تابع

f: A → B وقتی f تابع است که عضو مجموعه اول فقط یک بار استفاده شده باشد.



A={1,2,3,4}　　دامنه　　　　B={a,b,c,d}　　برد

f{(1,a) (2,c) (4,d) (3,b)}　　تابع است

f{(1,a) (2,c) (2,d)}　　تابع نیست

❉ f(a): تصویر a تحت تابع f

ترکیب توابع

$f: A \to B$
$g: B \to C$

$gof(x) = g(f(x))$: $A \to C$

$fog(x) = f(g(x))$: وجود ندارد چرا که $\to A,C$ باید یکی باشند که نیستند

مثال) توابع روبرو را ترکیب کنید؛

$f(a)= 1+2a$　　　　$g(b)= 2b$

$gof(x) = g(f(x))$

$= g(1+2a) = 2(1+2a) = 2+4a$

※ **تابع همانی:** تابعی که خودش را نتیجه دهد تابع همانی گفته می شود؛ مانند: $A=\{1,2,3\} \rightarrow \{(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\}$

※ **تابع همه‌جا تعریف شده:** تابع f را همه‌جا تعریف شده گویند، اگر دامنه‌ی f برابر با تمامی اعضای مجموعه‌ی A باشد. (xها یا عضوهای اول).

※ **تابع پوشا:** تابعی است که برد آن برابر با مجموعه‌ی B باشد؛ (به عبارت دیگر تمام عضوهای دوم در مجموعه ی B باشند یا yها).

※ **تابع یک‌به‌یک:** تابع f را یک‌به‌یک گویند، در صورتی که $f(a)=f(b)$ آنگاه $(a=b)$ ـ به این معنا که عضو دوم زوجهای مرتب نباید تکراری باشد.

مثال) دو مجموعه روبرو را در نظر بگیرید: $B=\{a,b,c\}$, $A=\{1,2,3\}$

$F: \{(1,a)\ (2,b)\ (3,c)\}$

※※تابع فوق هر سه حالت همه‌جا تعریف شده، پوشا، و یک‌به‌یک است.

← وارون یک تابع (f^{-1}): تابع f از A به B را وارون‌پذیر گویند، هرگاه f^{-1} نیز یک تابع باشد.

← f^{-1} یک تابع است، اگر و تنها اگر f یک تابع یک‌به‌یک باشد.

← f^{-1} پوشا است، اگر و تنها اگر f همه‌جا تعریف شده باشد.

← تابع $f: A \rightarrow B$ را یک تناظر یک‌به‌یک از مجموعه‌ی A به B گویند، اگر و تنها اگر دارای هر سه خاصیت پوشا، یک‌به‌یک و همه‌جا تعریف شده باشد.

← اگر $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$

$gof = I_A$ ← تابع همانی A

$fog = I_B$ ← تابع همانی B

← اگر تابع $f: A \rightarrow B$ وارون پذیر باشد و $g: B \rightarrow A \mid C$ وارون پذیر باشد، gof نیز وارون‌پذیر بوده و خواهیم داشت:

$(gof)^{-1} = f^{-1} \text{ o } g^{-1}$

مثال) آیا رابطه‌ی زیر هم ارزی است یا خیر!؟ و کلاس هم ارزی آنرا بنویسید؛

$(a,b)\ S\ (c,d) \leftrightarrow a^2 + b = c^2 + d$

بررسی بازتابی:

$(a,b)\ S\ (a,b) \rightarrow a^2 + b = a^2 + b$

بررسی تقارنی:

$(a,b)\ S\ (c,d)$, $(c,d)\ S\ (a,b) \rightarrow ?$

$a^2 + b = c^2 + d \rightarrow c^2 + d = a^2 + b$

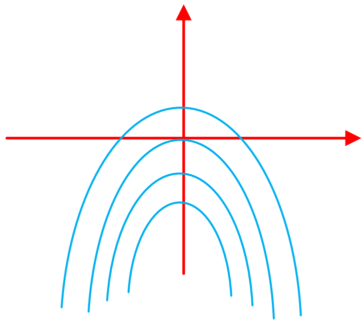
بررسی تعدی:

$(a,b)\ S\ (c,d)$ $\qquad$ $(c,d)\ S\ (e,f)$

$a^2 + b = c^2 + d \quad \rightarrow \quad c^2 + d = e^2 + f \quad \rightarrow \quad a^2 + b = e^2 + f \quad \rightarrow (a,b)\ S\ (e,f)$

کلاس هم‌ارزی:

$[\ (a,b)\ ] = \{\ (x,y) \mid (x,y)\ S\ (a,b)\ \}$ $\quad x^2 + y = a^2 + b \quad \rightarrow \quad y = -x^2 + a^2 + b$ $\quad$ منحنی

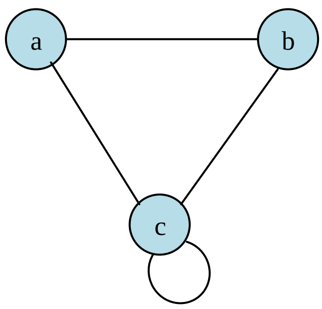


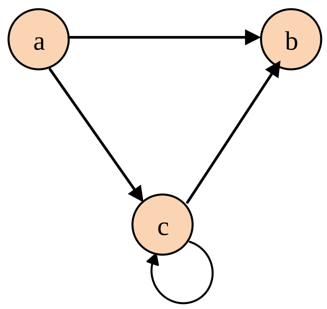
گراف

مجموعه‌ای از رؤس و یال‌ها، هم می تواند جهت‌دار . هم بدون جهت باشند: G(N, E)   یا   G(V, E) و E ∈ V*V است.

V یا N : رؤس گراف   و   E: یال‌های گراف را مشخص می‌کنند.

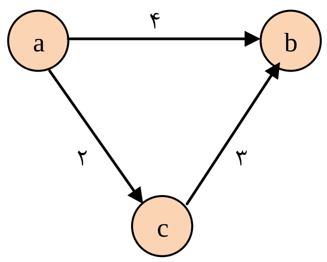
V={a,b,c}   ,   E={ (a,b) (a,c) (c,b) (c,c) }





❊ اگر یال‌های گراف جهتی نداشته باشند، گراف بدون جهت و اگر یال‌های گراف دارای جهت باشند گراف جهت‌دار است.

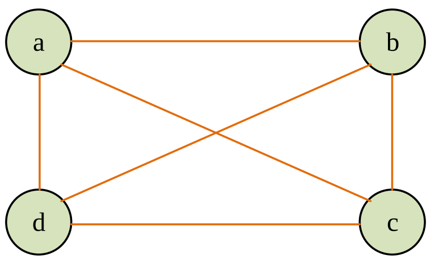
❊ گراف وزن دار، گرافی است که روی هر یال آن عدد یا علامتی باشد که نشان دهنده‌ی وزن آن یال است. مانند نمایش کل کشور با گراف و مشخص کردن فاصله بین شهرها توسط وزن‌های مشخص شده روی یال‌های گراف!



❊ گرافی که فقط Node (رأس) دارد و یال نداشته باشد، تهی است.   اگر n رأس باشد ← K'_n

❊ گراف کامل، گرافی است که بدون در نظر گرفتن جهت، بین هر دو گره یک یال وجود داشته باشد.

اگر n رأس باشد ← K^n

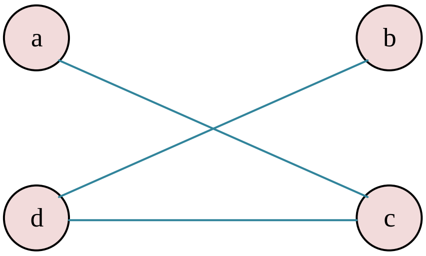


در گراف کامل یال‌ها به صورت زیر محاسبه می شوند؛

$$\frac{n(n-1)}{2} \quad \text{یا} \quad \binom{n}{2}$$

❈ گراف مکمل یک گراف: برای یافتن گراف مکمل گراف G، یال‌های G را حذف کرده و یال‌هایی که در گراف کامل هستند را رسم می کنیم؛

گراف G



مکمل گراف G

❈ درجه‌ی گره در یک گراف بدون جهت، تعداد یال‌هایی است که از آن گره می‌گذرد، در حالی که در یک گراف جهت دار؛ درجه‌ی ورودی یک رأس تعداد یال‌هایی است که به آن وارد می شوند و آنرا به شکل $\deg^{-}(V)$ نشان می دهند. و درجه‌ی خروجی یک رأس تعداد یال‌هایی است که از خارج می‌شوند و به شکل $\deg^{+}(V)$ نشان می‌هند.

❈ مجموع درجات رؤس یک گراف بدون جهت دو برابر تعداد یال‌ها در آن گراف است؛

تعداد یال‌ها $\frac{\sum \deg(V)}{2} = E$

❈ تعداد رؤس درجه فرد یک گراف همواره زوج است.

❈ مسیر در یک گراف یعنی اینکه از هر رأس به رأس دیگر راه وجود داشته باشد.

❈ مدار در یک گراف به این معنی است که از هر رأس آغاز نماییم پس از طی مسیری به خود آن رأس برگردیم.

❊ گراف همبند بدون جهت، گرافی است که بین هر دو رأس مسیری وجود داشته باشد.

❊ گراف همبند جهت دار، گرافی است که با حذف جهت‌ها یک گراف همبند بدون جهت باشد.

❊ گراف قویاً همبند، گرافی است که به ازای هر دو رأس دلخواه a و b هم مسیر از a به b وجود داشته باشد و هم مسیری از b به a وجود داشته باشد.

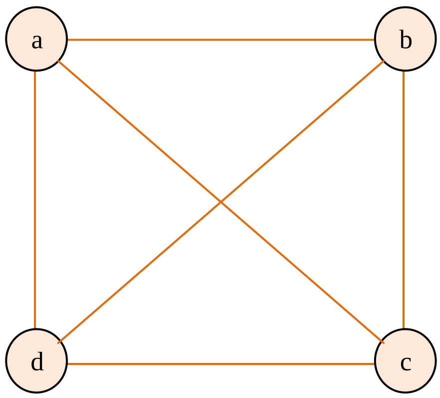
❊ **مسیر همیلتنی:** مسیری است که از هر گره‌ی گراف، فقط و فقط یک‌بار عبور کند.

❊ **دور همیلتنی:** مداری است که از هر رأس یک و فقط یک‌بار عبور کند و به خود باز گردد.

❊ **مسیر اولری:** مسیری است که از هر یال، یک و فقط یک‌بار عبور کند.

❊ **مدار اولری:** مداری است که از هر یال، یک و فقط یک‌بار عبور کند و به خود برگردد.

مثال) در گراف‌های زیر مشخص کنید که آیا مسیر همیلتنی، مدار همیلتنی، مسیر اولری و مدار اولری وجود دارد یا خیر!؟

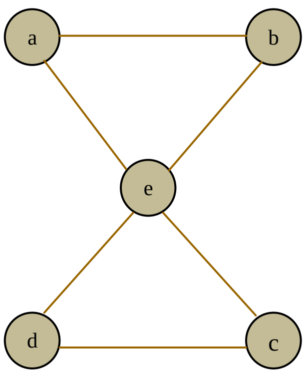


مسیر همیلتنی دارد

مدار همیلتنی دارد

مدار اولری ندارد ← (a,b) (b,c) (c,a) (a,b)

مسیر اولری ندارد.

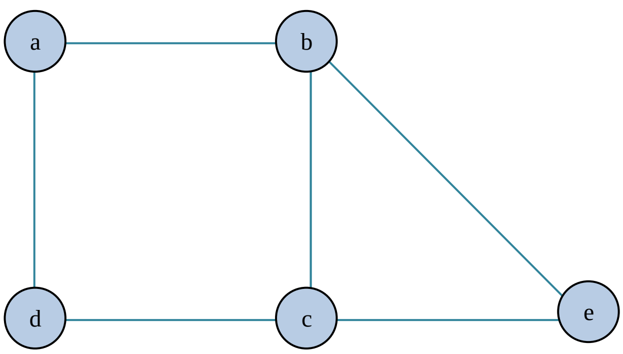


مسیر همیلتنی دارد ← a b e c d

مدار همیلتنی ندارد

مدار اولری دارد ← (a,b) (b,e) (e,c) (c,d) (d,e) (e,a)

چون مدار اولری دارد پس مسیر اولری هم دارد.



مسیر همیلتنی دارد ← a b e c d

مدار همیلتنی دارد

مسیر اولری دارد

مدار اولری ندارد

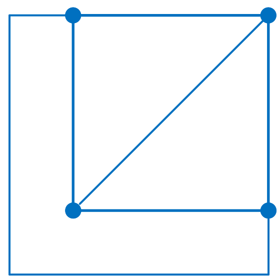
گراف مسطح (Flat)

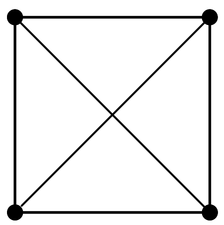
گراف G را مسطح گویند، اگر G را در یک صفحه بتوانیم به گونه ای رسم کنیم که یال‌های آن یکدیگر را قطع نکنند!

مثال) کدامیک از گراف‌های زیر مسطح است؟

مسطح است!

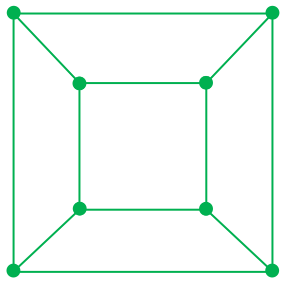
تعداد نواحی گراف مسطح $r = 6-4+2 = 4$

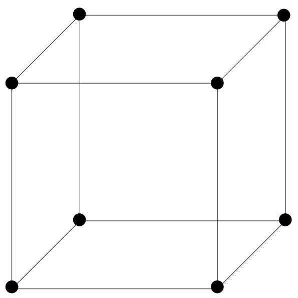




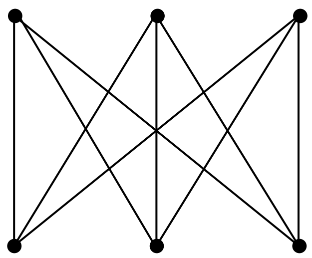
مسطح است!

تعداد نواحی گراف مسطح $r = 12-8+2 = 6$



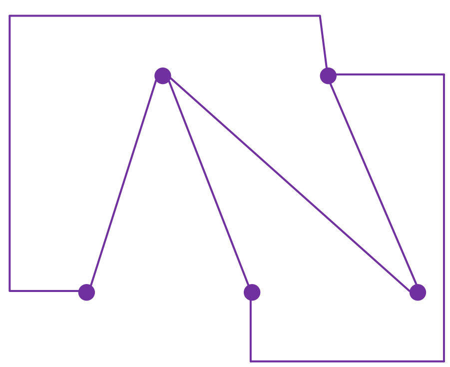


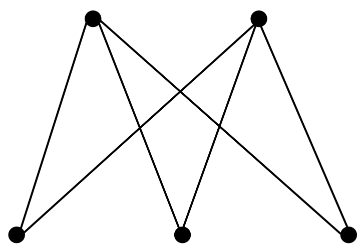
مسطح نیست!



مسطح است!

تعداد نواحی گراف مسطح $r = 6-5+2 = 3$





❋ با استفاده از گراف مسطح می‌توان فضای صفحه را به نواحی مجزا تقسیم کرد که آنرا با حرف r نشان می‌دهند و تعداد این نواحی برابر است با: R=E-V+2

❋ در صورتی که تعداد یال‌ها بزرگتر از 3V-6 باشد، در این صورت گراف قطعاً غیر مسطح است!

گرافی غیر مسطح است که: E>3V-6

گراف مسطح است که: E≤ 3V-6

مثال) آیا گراف کامل K_5 را می‌توان مسطح رسم کرد؟

پاسخ:

فرمول یال‌ها در گراف کامل : $\frac{n(n-1)}{2}$ پس تعداد یال‌ها در این گراف: $E = \frac{5(5-1)}{2} = 10$

بررسی مسطح بودن: E≤ 3V-6 پس 10≤ (3*5) - 6 (برقرار نیست)

به عبارتی دیگر 9 ≤10 نیست، پس گراف مسطح نیست!

رنگ آمیزی گراف

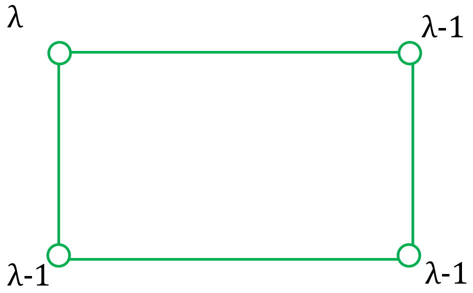
رنگ آمیزی گراف G به این مفهوم است که به رؤس گراف رنگ‌هایی نسبت دهیم به نحوی که هیچ دو رأس مجاوری هم رنگ نباشند.

عدد کروماتیک: این عدد که با λ_{min} یا λ_n نشان داده می‌شود، حداقل تعداد رنگهایی است که می‌توان با استفاده از آن یک گراف را رنگ آمیزی کرد و به عنوان عدد فامی یا عدد رنگی از آن یاد می‌شود.

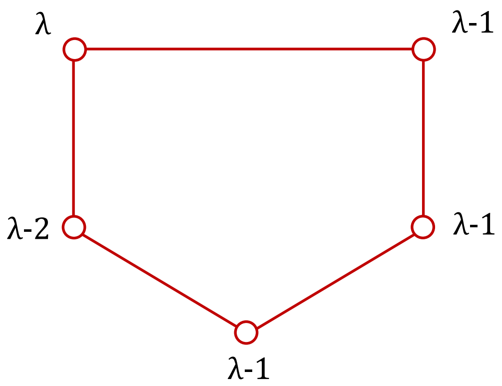
چند جمله‌ای کروماتیک: چند جمله‌ای کروماتیک گراف G به صورت P(G,λ) نمایش داد می شود و تعداد رنگ آمیزی‌های متمایز G را با توجه به تعداد رنگ λ مشخص می کنند. به این چند جمله‌ای، چند جمله‌ای رنگی نیز گفته می‌شود.

به عبارتی دیگر تعداد رنگ آمیزی‌های متفاوتی که می توان با استفاده از حداقل رنگ بدست آمده برای گراف استفاده کرد را چند جمله‌ای کروماتیک گویند.

مثال) با فرض آنکه حداقل رنگ مورد نیاز λ است، گراف های زیر را به چند صورت می توان رنگ کرد؟



رأس اول را می توان با یکی از تمامی رنگهای موجود رنگ کرد پس می‌توانیم از λ رنگ یکی را انتخاب کنیم.
رأس دوم با توجه به اینکه در مجاورت رأس اول قرار دارد پس با یک رنگ کمتر می تواند رنگ شود پس λ-1 رنگ قابل انتخاب است.
رأس سوم با توجه به اینکه در مجاورت رأس دوم است اما در مجاورت رأس اول نیست و طبق تعریف رنگ آمیزی گراف، این رأس نیزλ-1 رنگ را می تواند انتخاب کند.
رأس چهارم در مجاورت رأس سوم و اول است اما در مجاورت رأس دوم نیست و رأس سوم و اول به دلیل عدم مجاورت ممکن است رنگ مشابه داشته باشند پس کماکان فقط یک رنگ از کل رنگها قابل انتخاب نیست و این رأس نیز λ-1 رنگ می تواند حق انتخاب داشته باشد.
پس در نهایت فرمول کلی برای شکل روبرو جهت تعداد حالتهای متفاوت رنگ آمیزی به صورت: $\lambda(\lambda-1)^3$ است.



رأس اول را می توان با یکی از تمامی رنگهای موجود رنگ کرد پس می‌توانیم از λ رنگ یکی را انتخاب کنیم.
رأس دوم با توجه به اینکه در مجاورت رأس اول قرار دارد پس با یک رنگ کمتر می تواند رنگ شود پس λ-1 رنگ قابل انتخاب است.
رأس سوم با توجه به اینکه در مجاورت رأس دوم است اما در مجاورت رأس اول نیست و طبق تعریف رنگ آمیزی گراف، این رأس نیزλ-1 رنگ را می تواند انتخاب کند.
رأس چهارم در مجاورت رأس سوم است اما در مجاورت رأس دوم نیست و رأس سوم و اول به دلیل عدم مجاورت ممکن است رنگ مشابه داشته باشند پس کماکان فقط یک رنگ از کل رنگها قابل انتخاب نیست و این رأس نیز λ-1 رنگ می تواند حق انتخاب داشته باشد.
رأس پنجم در مجاورت رأس چهارم و اول است و از آنجا که رأس چهارم ممکن است با رأس دوم به دلیل عدم مجاورت همرنگ باشد و رأس اول نیز رنگ مجزا دارد پس در اینجا دو رنگ قابل انتخاب نیست؛
در نتیجه λ-2 رنگ برای رأی پنجم قابل انتخاب است.
پس در نهایت فرمول کلی برای شکل روبرو جهت تعداد حالتهای متفاوت رنگ آمیزی به صورت: $\lambda \times (\lambda-1)^3 \times (\lambda-2)$ است.

*** در حقیقت عمل انتخاب یک رنگ برای یک رأس با استفاده از عمل ترکیب (در درس آمار و احتمالات بیان شده است) انجام می شود.

❊ عدد کروماتیک گراف تهی برابر (۱) است.

❊ چند جمله‌ای کروماتیک گراف تهی با n رأس برابر است با λ^n

❊ عدد کروماتیک گراف کامل K_n برابر با n است.

❊ چند جمله‌ای کروماتیک گراف کامل K_n برابر است با؛

$$P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\ldots\big(\lambda-(n-1)\big)$$

تمرینات فصل اول

۱) گزاره های زیر را در نظر بگیرید:

P: یک بایت از ۷ بیت تشکیل شده است. Q: یک کلمه دارای ۲ بایت است.

r: یک بیت مساوی صفر و یا یک است.

الف) p∧q ← یک بایت ۸ بیت است و یک کلمه بستگی به تعداد کاراکترها بایت اشغال می کند پس چون هر دو (p,q) false هستند پاسخ and آنها نیز نادرست است.

د) ~p ← از آنجا که خود p نادرست است پس نقیض آن حتماً درست (true) است.

هـ) ~p∧~q با توجه به پاسخ الف پس نقیض هر دو گزاره ساده true است، در نتیجه پاسخ And نقیض آنها حتما True است.

۲) کدام یک از عبارتهای زیر هم ارز هستند؟

الف) p∨q , q∨p ← قانون جابجایی، پس هم ارز هستند.

ج) p∧(q∨r), (p∧q)∨(p∧r) ← قانون بخش پذیری، پس هم ارز هستند.

هـ) p∨(q∧r) , (p∨q)∧r ← با توجه به خانه های علامت زده شده، هم ارز نیستند.

p	q	r	p∨q	∧r
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

p	q	r	q∧r	∨p
T	T	T	T	T
T	T	F	F	T
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

۳) جدول درستی هر یک از گزاره های زیر را تشکیل دهید:

ب) $(p\leftrightarrow q)\longleftrightarrow r$

p	q	r	$p\leftrightarrow q$	$\leftrightarrow r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	T
F	T	T	F	F
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	F

ج) $p\leftrightarrow(q\longleftrightarrow r)$

p	q	r	$q\leftrightarrow r$	$\leftrightarrow p$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	T	F

۴) بدون استفاده از جدول درستی، نشان دهید که قیاس های زیر معتبر هستند:

الف) $p, p\to q \quad , \quad q\to r \vdash r$

	گزاره	قانون
1	P	فرض ۱
2	$p\to q$	فرض ۲
3	q	از ۱ و ۲ و استنتاج
4	$q\to r$	فرض ۳
5	r	از ۳ و ۴ و استنتاج

ج) $r \to (s \vee q) \vdash s$, $p \wedge \sim q , p \to r$

	گزاره	قانون
1	$p \wedge \sim q$	فرض ۱
2	p	تخصیص ۱
3	$\sim q$	تخصیص ۱
4	$p \to r$	فرض ۲
5	r	از۲و ۴ و استنتاج
6	$r \to (s \vee q)$	فرض ۳
7	$s \vee q$	از ۵و۶ و استنتاج
8	$\sim q \to s$	هم ارز ۷
9	s	۲و۸ و استنتاج

د) $\sim r \vdash q$, $p \leftrightarrow q , \sim p \to r$

	گزاره	قانون
1	$p \leftrightarrow q$	فرض۱
2	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	هم ارز ۱
3	$p \to q$	تخصیص ۲
4	$\sim q \to \sim p$	معکوس ۳
5	$\sim p \to r$	فرض۲
6	$\sim q \to r$	از ۴و۵ و تعدی
7	$\sim r \to q$	معکوس ۶
8	$\sim r$	فرض ۳
9	q	۷و۸ و استنتاج

۵) نشان دهید $t \to p \vdash \sim w , \sim p \to s , \sim r \vee w , \sim r \to (s \to \sim t)$

	گزاره	قانون
1	$\sim r \vee w$	فرض۱
2	$\sim w \to \sim r$	هم ارز ۱
3	$\sim w$	فرض ۲
4	$\sim r$	۲و۳ و استنتاج
5	$\sim r \to (s \to \sim t)$	فرض۳
6	$s \to \sim t$	از ۴و۵ و استنتاج
7	$\sim p \to s$	فرض ۴
8	$\sim p \to \sim t$	۶و۷ و تعدی
9	$t \to p$	معکوس ۸

تمرینات فصل دوم

۱- فرض کنید R یک رابطه‌ی باینری روی مجموعه A باشد. رابطه‌ی دیگری به نام S را روی مجموعه A به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$S = \{(a, b) | a, b \in A , \exists c \in A: aRc \wedge cRb\}$

ثابت کنید اگر R یک رابطه هم‌ارزی باشد، آن‌گاه S نیز هم‌ارزی است.

طبق تعریف R هم ارزی است یعنی دارای خاصیت بازتابی، تقارن و تعدی است پس به صورت زیر و با توجه بـه رابطـه And (عطفی) موجود در S خواهیم داشت؛

aRc بازتابی $\wedge$ cRb بازتابی $\rightarrow$ S حتما بازتابی است

$aRc \leftrightarrow cRa$ $\wedge$ $cRb \leftrightarrow bRc$ $\rightarrow$ S حتما تقارنی است

aRc , $cRd \leftrightarrow aRd$ $\wedge$ cRb , bRe $\rightarrow$ S حتما متعدی است

با توجه به اثباتهای انجام شده پس S نیز هم ارزی است.

۲- فرض کنید $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. مجموعه A به چهار زیرمجموعه زیر افراز شده است:

$\{a, b, c\}, \{d, e\}, \{f, g\}, \{h\}$. یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی A تعریف کنید که این افراز را ایجاد کند.

P={ {a, b, c}, {d, e}, {f, g}, {h} }

R={ (a,a) (a,b) (a,c) (b,a) (b,b) (b,c) (c,a) (c,b) (c,c) (d,e) (e,d) (e,e) (d,d) (f,g) (g,f) (f,f) (g,g) (h,h) }

۳- فرض کنید R رابطه باینری دل‌خواهی روی مجموعه X باشد. کدام یک از جملات زیر لزوماً درست نیست؟

A. $RoR^{-1} = R^{-1}oR$

B. $R \cup R^{-1}$ متقارن است

C. اگر R انتقالی(تعدی) باشد، R^{-1} نیز انتقالی است

D. اگر R پادمتقارن باشد، R^{-1} نیز پادمتقارن است

A) M_R

	A	B	C
A	1	0	1
B	1	0	1
C	0	1	0

$M_{R^{-1}}$

	A	B	C
A	1	1	0
B	0	0	1
C	1	1	0

$RoR^{-1} \rightarrow$ $M_{RoR^{-1}}$

	A	B	C
A	1	0	1
B	1	0	1
C	0	1	0

$R^{-1}oR \rightarrow$ $M_{R^{-1}oR}$

	A	B	C
A	1	1	0
B	0	0	1
C	1	1	0

در نتیجه : $RoR^{-1} \neq R^{-1}oR$

B)

M_R

	A	B	C
A	1	0	1
B	1	0	1
C	0	1	0

$M_{R^{-1}}$

	A	B	C
A	1	1	0
B	0	0	1
C	1	1	0

$R \cup R^{-1} \rightarrow \quad M_{R \cup R^{-1}}$

	A	B	C
A	1	1	1
B	1	0	1
C	1	1	0

با توجه به ماتریس روبرو $R \cup R^{-1}$ متقارن است.

C)

M_R

	A	B	C
A	1	1	1
B	1	1	1
C	0	0	0

$M_{R^{-1}}$

	A	B	C
A	1	1	0
B	1	1	0
C	1	1	0

همانطور که مشاهده می‌شود وارون ماتریس R متعدی است.

R={ (a,b) (b,c) (a,c) (b,a) (a,a) (b,b) }

R^{-1}= { (a,a) (a,b) (b,a) (b,b) (c,a) (c,b) }

D)

M_R

	A	B	C
A	1	1	0
B	0	0	1
C	1	0	0

$M_{R^{-1}}$

	A	B	C
A	1	0	1
B	1	0	0
C	0	1	1

همانطور که مشاهده می شود ماتریس R و ماتریس وارون آن پادمتقارن هستند.

۴- تعریف: بستار متقارن رابطه R، کوچک‌ترین رابطه‌ای است که شامل R است و دارای خاصیت تقارنی است.

می‌خواهیم بستار متقارن رابطه‌ای را که روی مجموعه‌ای با تعداد اعضای n تعریف شده است، بیابیم. گزینه‌های درست را مشخص کنید. (ممکن است بیش‌از یک گزینه درست وجود داشته باشد، پاسخ خود را به صورت دقیق و روشن توضیح دهید.)

الف) باید حداقل n زوج مرتب به رابطه اصلی اضافه شود.

ب) باید حداقل $\frac{n^2-n}{2}$ زوج مرتب به رابطه اصلی اضافه شود.

ج) ممکن است هیچ زوج مرتبی به رابطه اصلی افزوده نشود. ☑

د) حداکثر $\frac{n}{2}$ زوج مرتب باید به رابطه اصلی اضافه شود.

** برای اثبات هر کدام سعی به نقض آن می شود.

الف) نادرست است، چرا که ممکن است با هیچ زوج مرتبی بستار متقارن ایجاد شود.

ب) نادرست است طبق تعریف فوق.

ج) درست است، همانطور که گفته شد ممکن است بدون هیچ زوج مرتبی بستار خود متقارن باشد.

د) نادرست است زیرا برای ایجاد یک بستار متقارن در بدترین حالت نیاز به حداکثر n زوج مرتب وجود دارد.

۵- رابطه‌های R و S روی مجموعه A به صورت زیر تعریف شده‌اند:

R = {(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 4), (4,5)}

S = { (x,y) | x,y ∈ A, x+y بر ۳ بخش‌پذیر است }   A = {1, 2, 3, 4, 5}

الف) خواص R و S را بررسی کنید. (برای رابطه S برقراری یک ویژگی را به زبان ریاضی بیان کنید)

ب) ماتریس روابط RoS , R∩S , R∪S , R^{-1} , ~S را بیابید. (از عملیات ماتریسی روی M_R و M_S استفاده کنید)

A={1, 2, 3, 4, 5}

R = {(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 4), (4,5)}

S = {(1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (4, 5), (3, 3)}

الف) R و S دارای خاصیت پادتقارنی هستند.

ب)

M_S

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	0	0	1	1	0
3	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

M_R

	1	2	3	4	5
1	1	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0

M_{RoS}

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0

$M_{R\cap S}$

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

$M_{R\cup S}$

	1	2	3	4	5
1	1	1	0	0	1
2	0	0	1	1	0
3	0	0	1	1	0
4	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0

$M_R{}^{-1}$

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0
4	0	0	1	1	0
5	0	0	0	1	0

$M_{\sim S}$

	1	2	3	4	5
1	1	0	1	1	0
2	1	1	0	0	1
3	1	1	0	1	1
4	1	1	1	1	0
5	1	1	1	1	1

۶- مجموعه A و افراز P را روی این مجموعه در نظر بگیرید:

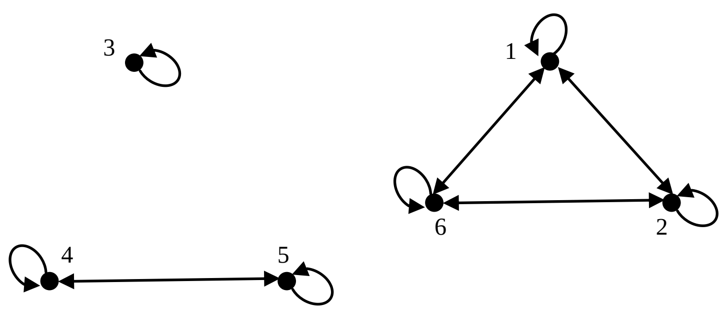
A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}　　　　P = {{1, 2, 6}, {3}, {4, 5}}

رابطه R یک رابطه هم‌ارزی روی A است که منجر به ایجاد افراز P روی مجموعه A شده است. گراف و ماتریس R را رسم کنید.

R={ (1,1) (1,2) (1,6) (2,1) (2,2) (2,6) (6,1) (6,2) (6,6) (3,3) (4,5) (5,4) (4,4) (5,5) }

M_R

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	1	1	0
6	1	1	0	0	0	1



۷- درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر R بازتابی باشد، آن‌گاه R^{-1} بازتابی است.

ب) اگر $R \subseteq S$ باشد، آن‌گاه $R^{-1} \subseteq S^{-1}$

ج) اگر $R \subseteq S$ باشد، آن‌گاه $\sim R \subseteq \sim S$

د) اگر R متقارن باشد، آن‌گاه R^{-1} متقارن است.

هـ) اگر R متقارن باشد، آن‌گاه ~R متقارن است.

و) اگر R و S متقارن باشند، آن‌گاه RoS نیز متقارن است.

الف) بر اساس شکل روبرو صحیح است.

M_R^{-1}

	1	2	3
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

M_R

	1	2	3
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

ب)

R= {(1,2) (2,3) (1,3) (1,1)}
S= {(1,1) (1,2) (1,3) (2,1) (2,2) (2,3) (3,1) (3,3)}

در رابطه ها فوق $R \subseteq S$

R^{-1}= {(2,1) (3,2) (3,1) (1,1)}
S^{-1}= {(1,1) (2,1) (3,1) (1,2) (2,2) (3,2) (1,3) (3,3)}

و طبق رابطه‌های فوق $R^{-1} \subseteq S^{-1}$

در نتیجه رابطه تساوی درست است.

ج) طبق روابط زیر، تعریف نادرست است.

R= {(1,2) (2,3) (1,3) (1,1)}
S= {(1,1) (1,2) (1,3) (2,1) (2,2) (2,3) (3,1) (3,3)}

~R= {(2,1) (2,2) (3,1) (3,2) (3,3)}
~S= {(3,2)}

د) طبق روابط زیر، تعریف درست است.

R= {(1,2) (2,1) (3,3)}
R^{-1}= {(2,1) (1,2) (3,3)}

هـ) طبق روابط زیر تعریف ذکر شده درست است.

R= {(1,1) (2,3) (3,2)}
~R= {(1,2) (1,3) (2,1) (2,2) (3,1) (3,3)}

و) طبق روابط و ماتریس‌های زیر تعریف درست است.

R= {(1,2) (2,1) (3,3)}

S= {(1,1) (2,3) (3,2)}

RoS={(1,2) (2,1) (3,3)}

M_R

	1	2	3
1	0	1	0
2	1	0	0
3	0	0	1

M_S

	1	2	3
1	1	0	0
2	0	0	1
3	0	1	0

M_{RoS}

	1	2	3
1	0	1	0
2	1	0	0
3	0	0	1

۸- بستارهای مورد نظر را برای روابط زیر که روی مجموعه S={1, 2, 3, 4, 5, 6} تعریف شده‌اند بیابید.

الف) بستار بازتابی و تقارنی رابطه $p = \{(1,1), (3,3), (1,4), (5,3), (1,5)\}$ را بیابید.

ب) بستار بازتابی و انتقالی رابطه $p = \{(2,2), (1,3), (3,3), (4,1), (3,5), (4,4)\}$ را بیابید.

الف)

R= {(1,1), (3,3), (1,4), (5,3), (1,5)   (2,2) (4,4) (5,5) (6,6) (4,1) (3,5) (5,1)}

ب)

R= {(2,2), (1,3), (3,3), (4,1), (3,5), (4,4)   (1,1) (5,5) (6,6) (1,5)}

۹- رابطه R={(a, b)| a+b<7} روی مجموعه A={1, 2, 3, 4} تعریف شده است.

آیا R بازتابی است؟ متقارن است؟ ضد متقارن است؟ متعدی است؟

R={(1,2) (2,3) (1,1) (1,3) (2,1) (1,4) (2,4) (2,2) (3,1) (3,2) (3,3) (4,1) (4,2)}

بازتابی نیست ـ متقارن است ـ ضد متقارن نیست ـ متعدی نیست.